

Droites et plans de l'espace

Droites de l'espace

- Soient A un point de l'espace et \vec{u} un vecteur non nul de l'espace. La droite passant par A de vecteur directeur \vec{u} est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{u} soient colinéaires.
- Si \mathcal{D} est une droite de vecteur directeur $\vec{u} (\neq \vec{0})$ et \mathcal{D}' est une droite de vecteur directeur $\vec{u}' (\neq \vec{0})$:
 - \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles si et seulement si \vec{u} et \vec{u}' sont colinéaires.
 - \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont orthogonales si et seulement si \vec{u} et \vec{u}' sont orthogonaux.

Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul de l'espace. La droite passant par A de vecteur directeur \vec{u} admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, l'ensemble des points de l'espace de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \alpha + ta \\ y = \beta + tb \\ z = \gamma + tc \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ où l'un au moins des trois réels α, β ou γ est non nul est la droite passant par le point $A(\alpha, \beta, \gamma)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$.

Plans de l'espace

Equation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

- Un **vecteur normal** à un plan \mathcal{P} est un vecteur **non nul** orthogonal à toute droite de \mathcal{P} . Deux vecteurs normaux à un même plan \mathcal{P} sont colinéaires.
- Soient A un point de l'espace et \vec{n} un vecteur non nul de l'espace. Le plan passant par A et de vecteur normal \vec{n} est l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

- Si dans un repère orthonormal le point A a pour coordonnées (x_A, y_A, z_A) et le vecteur \vec{n} a pour coordonnées (a, b, c) (l'un des trois réels a, b ou c n'étant pas nul), une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal \vec{n} est

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

- Dans un repère orthonormal, tout plan de l'espace admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où l'un des trois réels a, b ou c n'est pas nul. Réciproquement, l'ensemble d'équation $ax + by + cz + d = 0$ où l'un des trois réels a, b ou c n'est pas nul est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

Parallélisme et perpendicularité de deux plans ou d'un plan et d'une droite

\mathcal{P} est un plan de vecteur normal \vec{n} et \mathcal{P}' est un plan de vecteur normal \vec{n}' .

- \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles si et seulement si \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires.
- \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont perpendiculaires si et seulement si \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonaux.

\mathcal{P} est un plan de vecteur normal \vec{n} et \mathcal{D} est une droite de vecteur directeur \vec{u} .

- \mathcal{P} et \mathcal{D} sont parallèles si et seulement si \vec{n} et \vec{u} sont orthogonaux.
- \mathcal{P} et \mathcal{D} sont perpendiculaires si et seulement si \vec{n} et \vec{u} sont colinéaires.

\mathcal{P} et \mathcal{D} sont perpendiculaires si et seulement si \vec{u} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan \mathcal{P} .
Dans ce cas, \mathcal{D} est orthogonale à toute droite contenue dans \mathcal{P} .

Distance d'un point à un plan

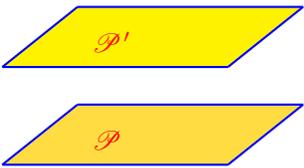
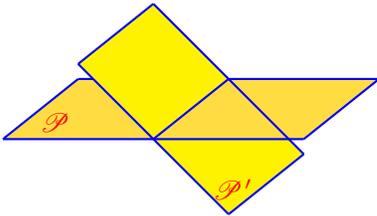
Soient \mathcal{P} un plan et M_0 un point. La distance de M_0 au plan \mathcal{P} est la distance de M_0 au projeté orthogonal H du point M_0 sur le plan \mathcal{P} . Cette distance est la plus courte distance de M_0 à un point quelconque de \mathcal{P} .

Si dans un repère orthonormal le plan \mathcal{P} a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ (l'un des trois réels a, b ou c n'étant pas nul) et M_0 a pour coordonnées (x_0, y_0, z_0) alors la distance de M_0 à \mathcal{P} est

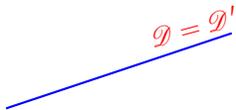
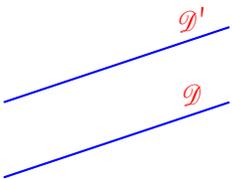
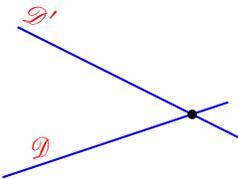
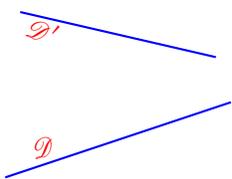
$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Positions relatives de droites et de plans

Deux plans

Plans parallèles		Plans non parallèles
confondus	strictement parallèles	sécants en une droite
		

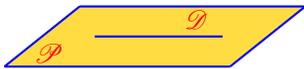
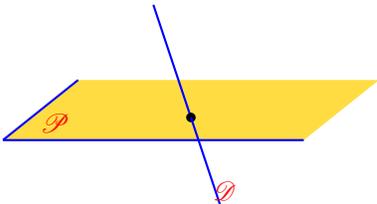
Deux droites

Droites parallèles		Droites non parallèles	
confondues	strictement parallèles	sécantes	non coplanaires
			
coplanaires			non coplanaires

En particulier,

- si \mathcal{D} et \mathcal{D}' n'ont aucun point en commun, \mathcal{D} et \mathcal{D}' peuvent être strictement parallèles ou non coplanaires,
- si \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas parallèles, \mathcal{D} et \mathcal{D}' peuvent être sécantes ou non coplanaires.

Une droite et un plan

Plans et droites parallèles		Plans et droites non parallèles
droite incluse	strictement parallèles	sécants en un point
		

Dans cette fiche, on n'a pas rappelé la notion de demi-espace ($ax + by + cz + d > 0$) ni les positions relatives de trois plans de l'espace.